

Deducción y simulación numérica de un nuevo modelo de avalanchas submarinas

E.D. FERNÁNDEZ-NIETO¹, F. BOUCHUT², D. BRESCH³,
M.J. CASTRO⁴, A. MANGENEY⁵

¹ *Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla.*

E.T.S. Arquitectura. Avda, Reina Mercedes, s/n. 41012 Sevilla, Spain

² *Département de mathématiques et applications, CNRS & École normale supérieure,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France*

³ *LAMA, UMR5127 CNRS, Univ. Savoie, 73376 Le Bourget du Lac (France)*

⁴ *Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Málaga.
F. Matemáticas, Campus Teatinos S/N, Spain*

⁵ *Département de modélisation physique et numérique, IPGP,
4, pl. Jussieu, 75232 Paris cedex 05, France*

*edofer@us.es, fbouchut@dma.ens.fr, Didier.Bresch@univ-savoie.fr,
castro@anamat.cie.uma.es, mangelney@ipgp.jussieu.fr*

Palabras clave: Avalanchas submarinas, Savage-Hutter, Volúmenes Finitos

Resumen

En este trabajo se estudia un nuevo modelo de tipo Savage-Hutter para avalanchas submarinas. El modelo obtenido es de tipo aguas someras bicapa en el que la capa superior representa al fluido y la capa inferior representa a un estrato de material granular. En la deducción del modelo se han tenido en cuenta diferentes leyes constitutivas en los tensores de esfuerzos, la porosidad del estrato de sedimento o roca y un término de fricción de tipo Coulomb. El modelo obtenido puede aplicarse en el estudio de problemas de avalanchas submarinas y algunos tipos de tsunamis. Finalmente se presentan la discretización del modelo obtenido mediante técnicas de volúmenes finitos bien equilibrados y un ensayo numérico donde se modela una avalancha submarina.

1. Introducción

En este trabajo se presenta un nuevo modelo para el estudio de avalanchas submarinas. El modelo obtenido es de tipo aguas someras bicapa en el que la capa superior representa un fluido y la capa inferior una capa de un material granular, por ejemplo una capa de sedimentos no cohesivos.

El modelo puede aplicarse a la predicción de algunos tipos de Tsunamis, como el ocurrido en Papua-Nueva Guinea en 1998 (ver [8]).

En la deducción del modelo se tienen en cuenta los siguientes efectos: curvatura de la topografía, porosidad del estrato de sedimentos, diferentes leyes constitutivas que relacionan los tensores de esfuerzos horizontales y verticales en el estrato de sedimentos. Además se incluye un término de fricción de tipo Coulomb (ver [13]) que difiere del habitual debido al efecto de flotabilidad, puesto que el sedimento se supone sumergido en el fluido.

Savage y Hutter presentaron en [13] un trabajo pionero sobre el estudio de avalanchas "poco profundas" de materiales granulares, obteniendo un modelo de tipo aguas someras en coordenadas locales sobre un plano inclinado, donde además se incorpora un término de fricción de tipo Coulomb, que viene a compensar los términos de presión. Estos modelos se conocen como de tipo Savage-Hutter (SH en adelante). Además se introducen leyes constitutivas para el tensor de esfuerzos horizontal imponiendo que son proporcionales al tensor vertical (presión). De esta forma, los términos que tienen en cuenta los efectos gravitacionales, que son los más importantes en el comienzo de la avalancha, son esencialmente diferentes a los obtenidos en un modelo de aguas someras para un fluido.

En [1] Bouchut et al. presentan nuevos modelos de tipo SH sin restricciones sobre el fondo, incluyendo efectos de la curvatura del mismo. Los nuevos términos en función de la curvatura son fundamentales para que el modelo contenga las soluciones estacionarias triviales, de material en reposo, y para que verifique una desigualdad de energía de forma exacta.

En [9], Iverson y Denlinger estudian modelos de avalanchas "poco profundas" de materiales parcialmente fluidizados, mezcla de un material granular y un fluido. El problema en este tipo de materiales es que el tensor de esfuerzos se puede descomponer como la suma de dos tensores, con el objetivo de imponer diferentes leyes constitutivas para la fracción de fluido y la fracción de material granular. La principal dificultad aparece en el proceso de integración en el que se obtiene la componente vertical de la suma de ambos tensores. Por lo tanto, es necesario incluir una hipótesis que permita extraer la definición del tensor vertical asociada a cada fracción.

El modelo que presentamos tiene como punto de partida el trabajo de Iverson (ver [9]): suponemos que el medio granular que representa al estrato de sedimentos se encuentra parcialmente fluidizado. Pero suponemos además, que se encuentra sumergido en un fluido. Se trata pues de un modelo bicapa, en el que la primera capa respresenta al fluido y la segunda capa al estrato de sedimentos parcialmente fluidizado. Las hipótesis necesarias para la obtención del modelo son las usuales para aguas someras, junto con las propuestas en los trabajos de [1] y [9].

El trabajo está organizado de la siguiente forma: En la Sección 2 se presentan las líneas principales bajo las que se deduce el modelo propuesto. En la Sección 3 se describe el tipo de aproximación numérica utilizada y un test numérico.

2. Deducción del modelo

Consideramos un medio estratificado compuesto por un fluido que suponemos no viscoso, homogéneo y de densidad constante ρ_1 y un material granular con densidad ρ_s , y porosidad ψ_0 . Podemos suponer que la densidad promedio del estrato de material granular

parcialmente fluidizado viene dada por

$$\rho_2 = (1 - \psi_0)\rho_s + \psi_0\rho_1. \quad (1)$$

Bajo la hipótesis de que ambos estratos son inmiscibles y no viscosos podemos modelarlos mediante las ecuaciones de Euler,

$$\operatorname{div} \vec{u}_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

$$\partial_t(\rho_i \vec{u}_i) + \rho_i \vec{u}_i \nabla \vec{u}_i = -\operatorname{div} P_i + \rho_i \nabla(\vec{g} \vec{M}), \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

donde las incógnitas son

$$\vec{u}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix},$$

siendo u_i y v_i la velocidad horizontal y vertical respectivamente. Por P_i denotamos los tensores de esfuerzos

$$P_i = \begin{pmatrix} p_{i,xx} & p_{i,xz} \\ p_{i,zx} & p_{i,zz} \end{pmatrix}.$$

$\vec{M} = (x, z)$ representa las coordenadas del punto en coordenadas cartesianas, y $\vec{g} = (0, -g)^T$, donde g es la constante de gravedad.

Si suponemos que el medio granular es poroso, con porosidad ψ_0 , relleno por el fluido que le rodea, podemos definir el tensor de esfuerzos del segundo estrato como suma de dos componente (ver [9]):

$$P_2 = P_2^s + P_2^f.$$

Presentamos a continuación los aspectos más relevantes en la deducción del modelo.

2.1. Cambio a coordenadas locales sobre el fondo

A fin de representar fielmente una avalancha sobre una topografía abrupta, como puede ser la ladera de un cañón submarino, es necesario escribir las ecuaciones en coordenadas locales sobre la topografía. Denotemos por X la variable longitud de arco sobre la topografía del terreno. Z se mide perpendicularmente al fondo (ver Figura 1).

Por U_i , $i = 1, 2$ denotamos la velocidad paralela al fondo para ambas capas, por V_i la correspondiente velocidad perpendicular al fondo. Y θ el ángulo que forma el vector tangente al fondo con la horizontal. Entonces, si $J = 1 - Z \partial_X \theta$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \partial_X(U_i) + \partial_Z(J V_i) = 0, & i = 1, 2. \\ \rho_i \partial_t(J U_i) + \rho_i \partial_X(U_i^2) + \rho_i \partial_Z(J V_i U_i) + \rho_i \partial_X(\vec{g} \vec{M}) = -\partial_X(P_{iXX}) - \partial_Z(J P_{iZX}) + \\ + \rho_i V_i (\partial_X(U_i \theta) + \partial_Z(J V_i \theta)) + P_{iXZ} \partial_X \theta. & i = 1, 2. \\ \rho_i \partial_t(J V_i) + \rho_i \partial_X(U_i V_i) + \rho_i \partial_Z(J V_i^2) + \rho_i J \partial_Z(\vec{g} \vec{M}) = -\partial_X(P_{iXZ}) - \\ - \partial_Z(J P_{iZZ}) - \rho_i U_i (\partial_X(U_i \theta) + \partial_Z(J V_i \theta)) - P_{iXX} \partial_X \theta, & i = 1, 2. \end{cases}$$

donde $\mathcal{P} = R_\theta^{-1} P R_\theta$, con

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

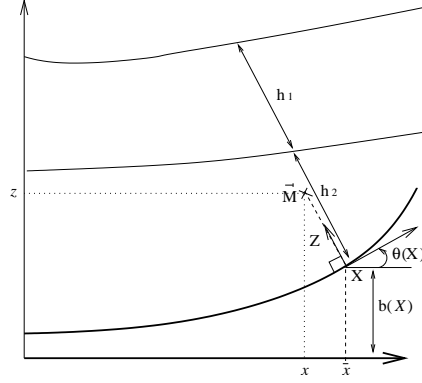


Figura 1: Coordenadas locales e incógnitas.

2.2. Condiciones de frontera y cinemáticas

Si denotamos por h_1 y h_2 la altura de la capa de fluido y sedimento respectivamente, y $S = h_1 + h_2$.

Las condiciones cinemáticas son

$$\partial_t S + U_1 \partial_X S - W_1 = 0. \quad (4)$$

$$\partial_t h_2 + U_i \partial_X h_2 - V_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Como condiciones de frontera imponemos:

Sobre $\mathbf{Z} = S$

$$\mathcal{P}_1 \cdot \eta^S = 0. \quad (6)$$

Sobre $\mathbf{Z} = h_2$

$$\mathcal{P}_1 \mathbf{Z} \mathbf{Z} = \mathcal{P}_2 \mathbf{Z} \mathbf{Z}. \quad (7)$$

$$\mathcal{P}_i \cdot \eta^{h_2} - \eta^{h_2} (\eta^{h_2} \mathcal{P}_i \eta^{h_2}) = \begin{pmatrix} \text{fric}(U_1, U_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Sobre $\mathbf{Z} = 0$

$$(U, V_2) \cdot \eta^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 0. \quad (9)$$

$$\mathcal{P}_2 \eta^0 - \eta^0 (\eta^0 \mathcal{P}_2 \eta^0) = \begin{pmatrix} -\eta^0 (\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1) \eta^0 \frac{U_2^0}{|U_2^0|} \tan(\delta_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

donde por η^α , $\alpha = 0, h_2, S$, denotamos el correspondiente vector normal y por $\text{fric}(U_1, U_2)$ un término de fricción entre capas. Observamos que la ecuación (10) corresponde a imponer un término de fricción de tipo Coulomb sobre el fondo. Al restar en este término la componente $\eta^0 \mathcal{P}_1 \eta^0$, estamos teniendo en cuenta los efectos de flotabilidad en el peso de la capa de sedimentos (ley de Arquímedes).

2.3. Leyes constitutivas

Siguiendo los trabajos de Savage-Hutter imponemos una ley constitutiva para definir \mathcal{P}_{2XX}^s en función de \mathcal{P}_{2ZZ}^s . En concreto se impone

$$\mathcal{P}_{1XX} = \mathcal{P}_{1ZZ}, \quad \mathcal{P}_{2XX}^s = K \mathcal{P}_{2ZZ}^s, \quad \mathcal{P}_{2XX}^f = \mathcal{P}_{2ZZ}^f. \quad (11)$$

donde K representa las fuerzas internas en el sedimento (ver [13]).

Si realizamos un proceso de analisis adimensional, se obtiene una ley de presión hidrostática. Teniendo en cuenta las condiciones de frontera obtenemos

$$\mathcal{P}_{2ZZ}^s + \mathcal{P}_{2ZZ}^f = \mathcal{P}_{2ZZ} = \rho_1 h_1 \cos(\theta) + \rho_2 \cos(\theta)(h_2 - Z). \quad (12)$$

Como se imponen diferentes leyes para definir \mathcal{P}_{2XX}^s y \mathcal{P}_{2XX}^f , es necesario incluir una nueva hipótesis para que a partir de (12) se pueda obtener la definición de \mathcal{P}_{2ZZ}^s y \mathcal{P}_{2ZZ}^f .

Siguiendo [9] suponemos que \mathcal{P}_{2ZZ}^f es proporcional a la presión en ausencia de la capa de sedimento. La constante de proporcionalidad se puede dejar como un parámetro del modelo. En nuestro caso, a partir de una reescritura de (12) se propone que tal constante sea la porosidad de la capa de sedimento ψ_0 . Se obtiene entonces que

$$\mathcal{P}_{2ZZ}^s = (1 - \psi_0)(\rho_1 h_1 + \rho_s(h_2 - Z))\cos(\theta), \quad \mathcal{P}_{2ZZ}^f = \psi_0 \rho_1 (h_1 + h_2 - Z)\cos(\theta)$$

Y por lo tanto, siguiendo las leyes constitutivas (11) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{2XX} &= K \mathcal{P}_{2ZZ}^s + \mathcal{P}_{2ZZ}^f = \\ &= h_1 \cos(\theta) \rho_1 (K(1 - \psi_0) + \psi_0) + (h_2 - Z) \cos(\theta) (\psi_0 \rho_1 + K(1 - \psi_0) \rho_s). \end{aligned}$$

2.4. Modelo

La obtención del modelo se completa mediante un proceso de integración en altura, suponiendo que tenemos un dominio "poco profundo". El modelo obtenido es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h_1 + \partial_X(h_1 \bar{U}_1) = 0, \\ \partial_t(h_1 \bar{U}_1) + \partial_X(h_1 \bar{U}_1^2 + g \frac{h_1^2}{2} \cos(\theta)) = \\ -gh_1 \partial_X b + g \sin(\theta) \partial_X \theta \frac{h_1^2}{2} - gh_1 \partial_X (\cos(\theta) h_2) + \frac{1}{\rho_1} \text{fric}(U_1, U_2) \\ \partial_t h_2 + \partial_x(h_2 \bar{U}_2) = 0, \\ \partial_t(h_2 \bar{U}_2) + \partial_X \left(h_2 \bar{U}_2^2 + g \frac{h_2^2}{2} \cos(\theta) (1 + (1 - \psi_0) r_s (K - 1)) \right) = \\ -gh_2 \partial_x b - rgh_2 (K(1 - \psi_0) + \psi_0) \partial_X (h_1 \cos(\theta)) - \\ -\frac{1}{\rho_2} \text{fric}(U_1, U_2) + g \frac{h_2^2}{2} \sin(\theta) \partial_X \theta + \mathcal{T}. \end{array} \right. \quad (13)$$

donde por \mathcal{T} denotamos el término de fricción de Coulomb. Este término se define de la siguiente forma

$$\text{Si } |\mathcal{T}| \geq \sigma_c \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T} = -g \cos(\theta) (1 - r) h_2 \frac{U_2}{|U_2|} \tan(\delta_0). \quad (14)$$

$$\text{Si } |\mathcal{T}| < \sigma_c \quad \Rightarrow \quad U_2 = 0. \quad (15)$$

donde $\sigma_c = g(1-r)h_2\cos(\theta)\tan(\delta_0)$. Recordamos que por ψ_0 denotamos la porosidad de la capa de sedimento, además denotamos $r = \rho_1/\rho_2$ y $r_s = \rho_s/\rho_2$. Siendo ρ_1 la densidad del fluido, ρ_s la densidad del material granular y ρ_2 se define en (1).

3. Aproximación numérica

El sistema anterior, se puede reescribir como un sistema hiperbólico con productos no conservativos y términos fuentes, de la forma

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(b, W) = B(W) \frac{\partial W}{\partial x} + S(W) \frac{\partial b}{\partial x} + G(b, W). \quad (16)$$

donde el vector de incógnitas $W(x, t)$ está definido en $[a, b] \times (0, T)$, y toma valores en un subconjunto Ω de \mathbb{R}^4 ; F es una función regular de $\mathbb{R} \times \Omega$ en \mathbb{R}^4 ; B , es una función matricial regular de Ω en $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$; S , es una función de Ω en \mathbb{R}^4 ; $b(x)$ es una función conocida de \mathbb{R} en \mathbb{R} .

El término $G(b, W)$ que contiene los términos de fricción será discretizado de forma implícita (ver [11]). Por lo tanto, lo consideramos igual a cero para describir la discretización explícita del resto de los términos.

Una vez reescrito el sistema bajo la estructura (16), se puede escribir como un sistema en forma no conservativa, añadiendo la ecuación $\partial_t b = 0$.

$$\tilde{W}_t + \mathcal{A}(b, \tilde{W}) \tilde{W}_x = 0, \quad x \in [a, b], t \in (0, T), \quad (17)$$

siendo \mathcal{A} , una función matricial regular de $\mathbb{R} \times (\Omega \times \mathbb{R})$ en $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$. Siendo \tilde{W} el vector de incógnitas ampliado $\tilde{W} = (W, b)^T$. (ver [10], [4], [5], [6], [7], [12]).

Los productos no conservativos no tienen sentido como distribución. Usando la teoría desarrollada por Dal Maso, Le Floch y Murat en [2] se les puede dar un sentido como medidas de Borel. Esta teoría está basada en la elección de una familia de caminos.

En [12] se propone una generalización del método de Roe para sistemas con productos no conservativos. Este es el método que se ha utilizado en este trabajo para la discretización del modelo propuesto, una vez reescrito bajo la estructura (17).

3.1. Test numérico

Presentamos en este epígrafe un test numérico donde se simula una avalancha submarina. En [3] se presentan otros tests numéricos, así como la deducción completa del modelo.

Consideramos un canal de 10 metros de longitud, discretizado usando 200 celdas. Fijamos el parámetro CFL igual 0.8, la porosidad igual a cero y el ratio de densidades entre el fluido y el sedimento igual a $r = 0.2$. El ángulo de Coulomb se fija a $\delta_0 = 25$.

Se considera una topografía definida por un plano inclinado de pendiente 0.2. Como condición inicial se parte de un fluido y sedimento en reposo, con superficie libre constante fijada a 2.7 m. El espesor inicial de la capa de sedimento viene dada por un rectángulo de material de altura 1 m entre $x = 7$ y $x = 8$ (ver Figura 2(a)).

En la Figura 2 se presenta la evolución de la avalancha, así como la solución estacionaria a la que se ha convergido (véase 2(f)).

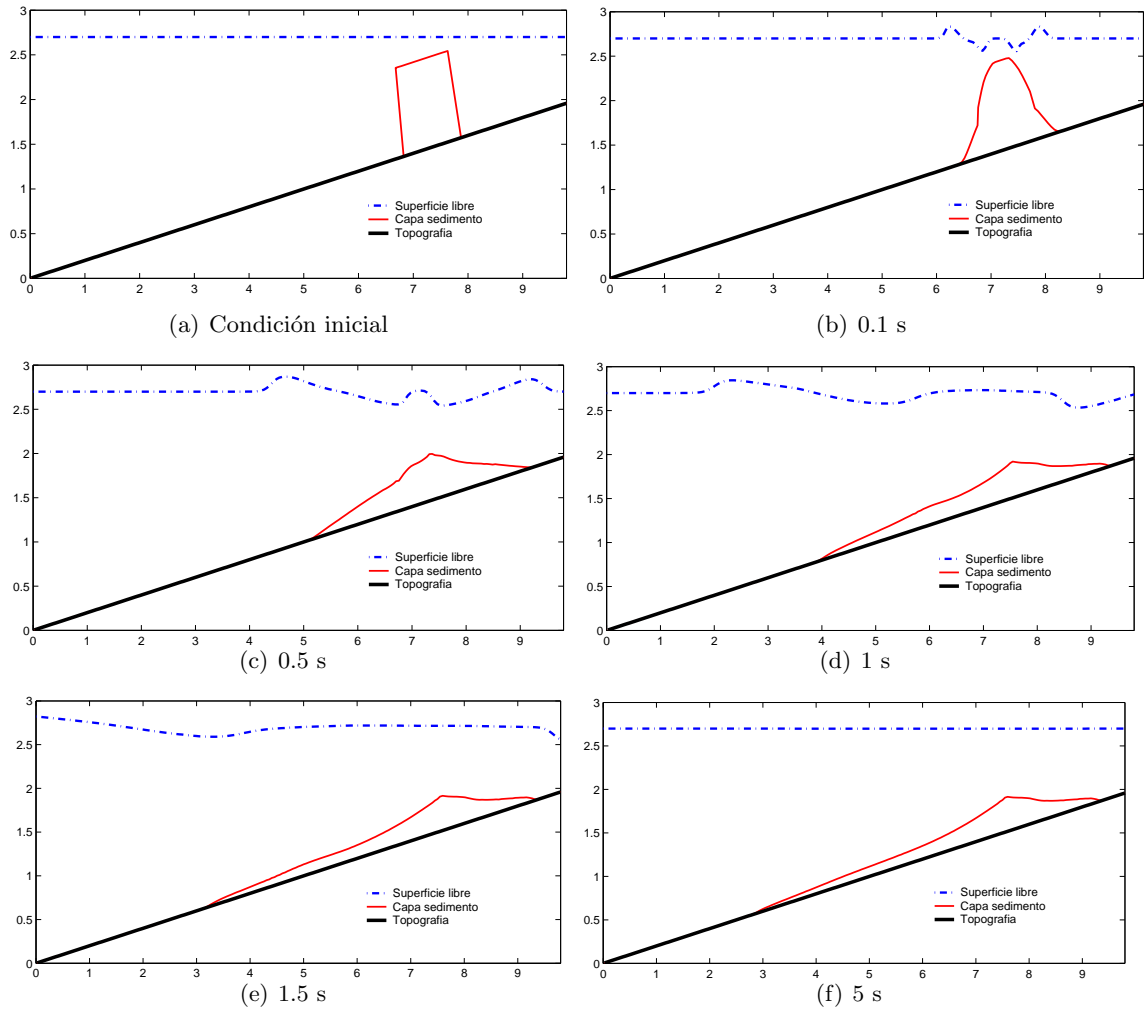


Figura 2: Evolución de la avalancha.

4. Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el gobierno Español mediante los proyectos de investigación MTM2007-08075 y MTM2006-01275.

Referencias

- [1] F. Bouchut, A. Mangeney-Castelnaud, B. Perthame, J.P. Vilotte, *A new model of Saint Venant and Savage-Hutter type for gravity driven shallow flows*. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser I 336 (2003) 531–536.
- [2] G.DAL MASO, P.G.LEFLOCH, F.MURAT. *Definition and weak stability of nonconservative products*. J. Math. Pures Appl. 74 (1995) 483–548.
- [3] E.D. Fernández-Nieto, F. Bouchut, D. Bresch, M.J. Castro, A. Mangeney *A new Savage-Hutter type model for submarine avalanches*. Preprint (2007).
- [4] L.Gosse *A well-balanced flux-vector splitting scheme designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms*. Comp. Math. with Appl. 39 (2000) 135–159.
- [5] L.Gosse. *A well-balanced scheme using non-conservative products designed for hyperbolic system of conservation laws with source terms*. Mat. Mod. Meth. Appl. Sc. 11 (2001) 339–365.
- [6] J.M.Greenberg and A.Y.LeRoux. *A well balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations*. SIAM J.Numer. Anal. 33 (1996) 1–16.
- [7] J.M. Greenberg, A.Y.LeRoux, R.Baraille, A.Noussair. *Analysis and approximation of conservation laws with source terms*. SIAM J.Numer. Anal. 34 (1997) 1980–2007.
- [8] Ph. Heinrich, A. Piatanesi, H. Hébert *Numerical modelling of tsunami generation and propagation from submarine slumps: the 1998 Papua New Guinea event*. Geophys. J. Int. 145, (2001) 97–11.
- [9] R.M. Iverson, R.P. Denlinger *Flow of variably fluidized granular masses across three-dimensional terrain*. J. of Geoph. Res. 106, B1, (2001) 537–552.
- [10] P.G.LEFLOCH. *Shock waves for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form*, INSTITUTE FOR MATH. AND ITS APPL., MINNEAPOLIS, PREPRINT 593, (1989).
- [11] A. MANGENEY-CASTELNAU, F. BOUCHUT, T.P. VILOTTE, E. LAJENEUSSE, A. AUBERTIN, M. PIRULLI, *On the use of Saint-Venant equations to simulate the spreading of a granular mass*, J. GEOPHYS. REV. 110 (B9), B09103 (2005).
- [12] C.PARÉS, M.J.CASTRO. *On the well-balance property of Roe’s method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to shallow-water systems*. ESAIM: M2AN, 38(5) (2004), 821–852.
- [13] S.B. SAVAGE, K. HUTTER, *The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to run-out*, ACTA MECH. 86, (1991) 201–223.